

ÍNDICE

- Elementos fundamentales
- Ángulos
- Triángulos y cuadriláteros
- Áreas y volúmenes
- Poliedros

ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE GEOMETRÍA

Conceptos fundamentales

Punto .

Recta

Plano

Semirecta : porción de recta limitada en un extremo por un punto

*

Semiplano : es cada una de las partes en que queda dividido un plano por una cualquiera de sus rectas .

semiplano A

semiplano B

Segmento : porción de recta comprendida entre dos de sus puntos , llamados extremos .

A* *B

Rectas paralelas : son aquellas que pertenecen al mismo plano y no tienen ningún punto en común .

Rectas secantes : son rectas que se cortan y dividen por tanto al plano en cuatro regiones .

Un caso particular de rectas secantes son las perpendiculares , que dividen al plano en cuatro regiones iguales .

Mediatriz de un segmento : es la recta perpendicular trazada en su punto medio .

a* *b

Cualquier punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento .

Ángulo : es una región del plano limitada por dos semirectas , que se llaman **lados** , y que tienen un punto común que se llama **vértice** .

lado

vértice *

lado

Clasificación de los ángulos :

- **recto** : cuando los dos lados son perpendiculares
- **agudo** : la abertura de los lados es menor que un ángulo recto
- **obtuso** : la abertura de los lados es mayor que un ángulo recto

Bisectriz de un ángulo : es la semirecta que divide al ángulo en dos ángulos iguales .

Cualquier punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo .

Línea poligonal : es una figura formada por varios segmentos unidos por sus extremos .

B

D

C

A

Cuando el extremo del último segmento coincide con el origen del primero , la línea poligonal se llama **cerrada** , y en caso de que no coincidan , **abierta** .

Polígono : es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada .

A

B

C

D

Los elementos de los polígonos son :

- a) **Lados** : segmentos que limitan el polígono , AB , BC , CD , DA .
- b) **Perímetro** : suma de las longitudes de los lados .
- c) **Vértices** : Puntos donde se unen dos lados consecutivos , A , B , C , D . En todo polígono el nº de lados y vértices coincide .
- d) **Diagonales** : son los segmentos que unen vértices no consecutivos .
- e) **Ángulos interiores** : son los ángulos formados por lados consecutivos .

f) Ángulos exteriores : son los ángulos formados por un lado y la prolongación de otro consecutivo .

A Ángulo interior = ABC

B Ángulo exterior = CBF

F

C

Clasificación de los polígonos :

a) Por el número de lados :

Triángulo

Cuadrilátero

Pentágono

Hexágono

Heptágono

Octógono

Eneágono

Decágono

b) Por su forma :

Equilátero : lados iguales

Equiángulo : ángulos iguales

Regular : lados y ángulos iguales

Irregular : lados y ángulos desiguales

Un polígono se halla **inscrito** en una circunferencia cuando todos sus vértices están contenidos en ella . Se dice entonces que la circunferencia está circunscrita al polígono .

Un polígono se halla **circunscrito** a una circunferencia cuando todos sus lados son tangentes (tocan en un solo punto) a la misma . Se dice entonces que la circunferencia está inscrita en el polígono .

Cuadrilátero inscrito en la circunferencia Pentágono circunscrito a una circunferencia

o circunferencia circunscrita al cuadrilátero o circunferencia inscrita en el pentágono .

Medida de ángulos

Puesto que el ángulo recto resulta una medida demasiado grande para medir ángulos , se definen otro tipo de unidades :

a) División sexagesimal

La unidad que habitualmente se utiliza es el **grado centesimal** , que es la noventa parte de un ángulo recto . Por lo tanto una circunferencia tiene 4 ángulos rectos * 90° cada uno = 4·90 = 360°

Minuto sexagesimal es la sesentava parte de un grado sexagesimal . 1° = 60'

Segundo sexagesimal es la sesentava parte de un minuto sexagesimal . 1' = 60"

b) División centesimal (no se suele utilizar)

La unidad es el **grado centesimal** , que es la centésima parte de un ángulo recto . Por lo tanto una circunferencia tiene 4 ángulos rectos * 100g = 4·100g = 400g

Minuto centesimal es la centésima parte de un grado centesimal . 1g = 100m

Segundo centesimal es la centésima parte de un minuto centesimal . 1m = 100s

c) Radián

Un **radián** es el ángulo cuyo arco tiene la longitud igual al radio de una circunferencia centrada en el vértice .

Como ya veremos el perímetro de una circunferencia es $2 \cdot R = 2 \cdot 3'14 \cdot R = 6'28 \cdot R$ es decir el perímetro de una circunferencia es aproximadamente 6 veces el radio de la circunferencia que nosotros dibujemos . Por lo tanto en un giro completo hay 6'28 radianes , es decir :

$$1 \text{ revolución} = 360^\circ = 2 \cdot \text{radianes}$$

Si hacemos una regla de tres :

$$360^\circ \quad 2 \cdot \text{radianes}$$

$$x^\circ \quad 1 \text{ radián}$$

$$x = 360/2 \cdot = 57'29^\circ$$

En el caso de que tengamos que pasar de grados a radianes (o a la inversa) resolveremos una regla de tres , siempre dejando el valor de sin operar , por ejemplo :

¿ Cuántos radianes son 30° ?

$$360^\circ \quad 2 \cdot \text{radianes}$$

$$30^\circ \quad x \text{ radianes}$$

$$x = 30 \cdot 2 \cdot /360 = /6 \text{ radianes}$$

¿ Cuántos grados son /4 radianes ?

$360^\circ \cdot 2$ radianes

$x / 4$ radianes

$$x = (360 \cdot /4)/2 = 45^\circ$$

Expresión compleja y decimal de la medida de un ángulo sexagesimal

La medida de un ángulo puede venir expresada en grados , minutos y segundos , o en una sola unidad :

$$8^\circ 30' 36'' \quad 8'51''$$

Forma compleja Forma decimal

Veamos como se pasa de una a otra :

$$8^\circ 30' 36'' = 8^\circ 30' 36/60' = 8^\circ 30' 0'6' = 8^\circ 30'6' = 8^\circ 30'6/60'' = 8^\circ 0'51'' = 8'51''$$

$$8'51'' = 8^\circ 0'51 \cdot 60' = 8^\circ 30'6' = 8^\circ 30' 0'6 \cdot 60'' = 8^\circ 30' 36''$$

Operaciones con medidas de ángulos sexagesimales

a) Suma

Para sumar ángulos deberemos sumar grados con grados , minutos con minutos y segundos con segundos .

$$32^\circ 15' 6''$$

$$+ 2^\circ 8' 29''$$

$$34^\circ 23' 35''$$

Si el resultado de alguna de estas sumas es mayor o igual que 60 , lo pasamos a la unidad inmediatamente superior .

$$15^\circ 20' 16''$$

$$+ 20^\circ 30' 54''$$

$$35^\circ 50' 70''$$

Teniendo en cuenta que $70'' = 1' 10''$ el resultado de la suma lo expresariamos como :

$$35^\circ 51' 10''$$

Importante : si la suma de dos ángulos es 90° , es decir , juntos forman un ángulo recto , se dice que son **complementarios** . Si la suma de dos ángulos es 180° , es decir , forman un ángulo llano , se dice que son **suplementarios** .

b) Resta

La operación se dispone igual que la suma

$$30^{\circ} 31' 12''$$

$$- 22' 48''$$

Puesto que no podemos restarle 48" a 12" debemos modificar el minuendo pasando 1 minuto a segundos : $30^{\circ} 31' 12'' = 30^{\circ} 30' 72''$

Con lo cual ya podemos realizar la resta :

$$30^{\circ} 30' 72''$$

$$- 22' 48''$$

$$30^{\circ} 8' 24''$$

c) Multiplicación

Para multiplicar un ángulo por un número natural debemos multiplicar los grados minutos y segundos por ese número :

$$4^{\circ} 20' 10''$$

$$\times 5$$

$$20^{\circ} 100' 50''$$

Ahora bien como $100' = 1^{\circ} 40'$ se tiene que : $20^{\circ} 100' 50'' = 21^{\circ} 40' 50''$

d) División

Par dividir un ángulo entre un número natural , se dividen por separado grados , minutos y segundos entre este número natural :

$$206^{\circ} 37' 46'' 5$$

$$06^{\circ} 41' 19' 33''$$

$$1^{\circ} \times 60 = 60'$$

$$97'$$

$$47'$$

$$2' \times 60 = 120''$$

$$166''$$

$$16$$

$$1''$$

Otra forma de operar con grados sexagesimales sería convertir los ángulos a grados solamente y operar con

ellos , y después si se quiere convertirlo otra vez a grados minutos y segundos .

$$32^{\circ} 15' 6'' = 32^{\circ} + 15/60^{\circ} + 6/3600^{\circ} = 32^{\circ} + 0'25'' + 0'00166'' = 32'25166''$$

$$2^{\circ} 8' 29'' = 2^{\circ} + 8/60^{\circ} + 29/3600^{\circ} = 2^{\circ} + 0'133'' + 0'00805'' = 2'14105''$$

$$34'39271''$$

$$\underline{34^{\circ}}$$

$$0'39271 \cdot 60 = \underline{23'5626''}$$

$$0'5626 \cdot 60 = \underline{35''}$$

Por lo que obtendriamos el mismo resultado : $34^{\circ} 23' 35''$

TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS

Triángulos . Clasificación .

Como ya vimos los triángulos son poligonos de 3 lados y por lo tanto 3 ángulos . Se pueden clasificar :

a) Por sus lados :

Equilátero , si tiene los tres lados iguales

Isósceles , si tiene dos lados iguales

Escaleno , si tiene los tres lados diferentes

b) Por sus ángulos :

Rectángulo , si tiene un ángulo recto

Acutángulo , si sus tres ángulos son agudos

Obtusángulo , si tiene un ángulo obtuso

En los triángulos rectángulos el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los otros dos lados , catetos .

Propiedades del triángulo

1. En todo triángulo , un lado es menor que la suma de los otros dos , pero mayor que su diferencia .

b c

a

En la figura se observa que si a fuese mayor que b+c entonces no podríamos juntar sus lados . Pero por otro lado a-b tampoco puede ser mayor que c para que se puedan unir .

2. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

a c b

a b

Los lados alternos internos a las paralelas son iguales .

Como por otro lado un ángulo llano mide 180° tenemos que $a + b + c = 180^\circ$

3. Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes .

b

$180 - a = b + c$ a c

a

Rectas y puntos notables de un triángulo

Mediatrices : son las rectas perpendiculares trazadas en los puntos medios de los lados .

Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto que se llama **circuncentro** que equidista de los vértices del triángulo y por lo tanto es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo .

Bisectrices : son las semirectas que dividen en dos partes iguales los ángulos interiores al triángulo .

Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado **incentro** que equidista de los lados del triángulo y por lo tanto es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo .

Alturas : son los segmentos perpendiculares a un lado o a su prolongación , trazados desde el vértice opuesto .

Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro** .

Medianas : son los segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado **baricentro** o centro de gravedad .

Teorema de Pitágoras

" En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa "

$b^2 + a^2 = c^2$

c

Cuadriláteros . Clasificación .

Los cuadriláteros como su propio nombre indica son aquellos polígonos de cuatro lados y por lo tanto cuatro ángulos . Se clasifican según el paralelismo de sus lados en :

1. **Trapezoides** son los que no tienen ningún lado paralelo a otro .

2. **Trapecios** son los cuadriláteros con dos lados paralelos .

Los trapecios se pueden clasificar en :

- **Trapecio rectángulo** , es el que tiene dos ángulos rectos
- **Trapecio isósceles** , es el que tiene los lados no paralelos iguales
- **Trapecio escaleno** , sin ninguna propiedad específica

3. **Paralelogramos** son aquellos cuadriláteros que tienen los lados paralelos dos a dos

y por lo tanto los ángulos opuestos (no adyacentes) son iguales y los lados opuestos son iguales .

Los paralelogramos se pueden clasificar en :

- **Rectángulo** , es el paralelogramo que tiene los 4 ángulos iguales (rectos) , pero los lados adyacentes no son iguales .
- **Cuadrado** , es el que tiene los 4 lados y 4 ángulos iguales .
- **Rombo** , es el que tiene los 4 lados iguales , y los ángulos opuestos iguales .
- **Romboide** , cuando no es ninguno de los anteriores .

ÁREAS Y VOLÚMENES

Áreas de figuras planas

Cuadrado Rectángulo Triángulo

l h h

l b b

$A = l \cdot l$ $A = b \cdot h$ $A =$